第7期 电子学报 Vol.41 No.7
2013年7月 ACTA ELECTRONICA SINICA Jul. 2013

基于正则FI代数的MT理想及其应用

吴洪博,汪 宁
(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710062)

摘 要: 本文基于经典代数的角度对正则FI代数进行了再研究.首先,在正则FI代数中通过蕴涵算子提出了MT理想的概念,讨论了正则FI代数中MT理想与同余关系的联系;其次,在正则FI代数中引入素MT理想的概念,并以素MT理想为工具给出了正则FI代数的条件嵌入定理;最后,通过以蕴涵算子表示的隐式余三角模对MT理想的特征进行了描述,并通过特征定理给出了正则FI代数中MT理想的生成方法.

关键词: 逻辑代数;正则FI代数;MT理想;同余关系;还原性;条件嵌入;生成方法
中图分类号: O141.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2013)07-1389-06
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.07.023

MT Ideals of Regular FI Algebras with Their Applications

WU Hong-bo, WANG Ning
(*College of Mathematics and Information Sciences*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an*, *Shaanxi* 710062, *China*)

Abstract: In the present paper, the regular FI algebras have been investigated again based on the idea of classical algebras. Firstly, in regular FI algebras the concept of the MT ideal is proposed by the implication operator, and the connections between MT ideals and congruence relations are discussed; Secondly, in regular FI algebras the prime MT ideals is defined, and the theorem of conditional embedding of regular FI regulars is gained by the prime MT ideals. Thirdly, the characteristic of MT ideals is described with the help of co-triangle-norm on regular FI algebras that is shown by the form of implication operators, and the generating method of MT ideals is given by the theorem of characteristic of MT ideals in regular FI algebras.

Key words: logic algebra; regular FI algebra; MT ideal; congruence relation; reducibility; conditional embedding; generating method

1 引言

逻辑代数结构的核心是剩余格,其中蕴涵算子的性质不仅决定着逻辑代数的基本结构[1~6],而且在相应的命题逻辑系统和基于命题逻辑系统建立的近似推理,模糊识别,模糊控制理论等方面发挥着重要的作用[7~17].

在模糊逻辑代数理论和模糊命题逻辑系统的研究方面,吴望名教授通过经典代数的定义方式将蕴涵算子引入一般集合中提出了Fuzzy蕴涵代数(简称FI代数),并引入了正则FI代数等[1],揭示了蕴涵算子的共同性质,建立了逻辑代数的基础.王国俊教授于文献[4]中建立了模糊命题演算的形式演绎系统L^*,并根据其语义理论的需要建立了R_0-蕴涵算子和R_0-逻辑代数.吴洪博教授通过对系统L^*和R_0-逻辑代数的研究和简化,于文献[5]中建立了基础R_0-代数和基础L^*系统,其中的BR_0-蕴涵算子将Lukasicwicz蕴涵算子和R_0-蕴涵算子作为它的特款.Hájek教授于文献[6]中建立了BL逻辑代数和BL逻辑系统.与FI代数的定义方式相同,MV代数的Wajsberg形式[6]亦是以蕴涵算子为唯一算子建立于一般集合上的逻辑代数.

在近似推理,模糊控制,模糊识别等方面,王国俊教授于文献[7]中基于正则蕴涵算子的分析性质建立了逻辑伪度量空间,于文献[9]中基于三重蕴涵算子建立了模糊推理的全蕴涵三I算法理论.刘华文教授等利用各种蕴涵算子的共有性质将模糊推理的全蕴涵三I算法进行了统一处理[10~12];李洪兴教授等将蕴涵算子成功应用于模糊系统,模糊控制,模糊识别等研究领域[13~17].

在以蕴涵算子为主体结构的逻辑代数理论中,基

收稿日期:2012-08-06;修回日期:2012-12-13;责任编辑:李勇锋
基金项目:国家自然科学基金(No.11171196)

于蕴涵算子建立的 MP 滤子结构[3~6,18]发挥着重要的作用.特别地,在逻辑代数或命题逻辑系统的完备性证明中发挥着关键的作用[3~6].基于通常理想和通常滤子在定义方面相互对偶,应用方面相互互补的特点[19],本文首先在正则 FI 代数中通过蕴涵算子首次提出了 MP 滤子的对偶概念 – MT 理想,通过具体实例和相关定理说明了正则 FI 代数中通常理想与 MT 理想的区别与联系;其次,在正则 FI 代数中引入了通过 MT 理想诱导的同余关系和通过同余关系诱导的 MT 理想,讨论了正则 FI 代数中 MT 理想与同余关系之间相互连续诱导的还原性;再之,在正则 FI 代数中引入素 MT 理想的概念,并利用素 MT 理想给出了正则 FI 代数的条件嵌入定理;最后,以蕴涵算子表示的隐式余三角模[4,6]形式对 MT 理想进行等价刻画,给出了 MT 理想的特征定理,并借助 MT 理想的特征定理给出了正则 FI 代数中 MT 理想的生成方法.本文的结果丰富了逻辑代数的研究方法与内容,有助于对逻辑代数的深层性质的进步研究.

2 基本概念与性质

定义 1[1] 一个(2,0)型代(X,→,0)称为正则 FI 代数,如果 $\forall x,y,z\in X$,有

$(I_1)\ x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$,

$(I_2)\ (x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=1$,

$(I_3)\ x\to x=1$,

$(I_4)\ (x\to y=1, y\to x=1)\Rightarrow(x=y)$,

$(I_5)\ 0\to x=1$,

$(I_6)\ (x\to 0)\to 0=x$.

其中 $1=0\to 0$.

引理 1[1] 设 X 是正则 FI 代数,$x,y,z\in X$,则

(1)$x\to 1=1$;

(2)$1\to x=x$;

(3)if $x\to y=1$, then

$(z\to x)\to(z\to y)=1$, $(y\to z)\to(x\to z)=1$;

(4)$x\to((x\to 0)\to y)=1$, $y\to((x\to 0)\to y)=1$;

(5)$x\to y=(y\to 0)\to(x\to 0)$;

(6)$x\to(y\to x)=1$.

证明 参见文献[1,20].

定义 2 设 M 是正则 FI 代数,$\sim\subseteq M^2$.称 $\sim$ 是 M 上的同余关系,如果满足:

(1)$\sim$ 是等价关系;

(2)$\sim$ 被运算→所保持,即 $\forall x,y,z\in M$,若 $x\sim y$, $z\sim w$,则$(x\to z)\sim(y\to w)$.

3 MT 理想与同余关系

定义 3 设 M 是正则 FI 代数,$D\subseteq M$.称 D 是 MT 理想,若 $\forall x,y\in M$,

(1)$0\in D$;

(2)若 $y\in D$, $(x\to y)\to 0\in D$,则 $x\in D$.

注 1 MT 理想的称谓来源于逻辑系统中 Modus Tollens[4,9].

例 1 根据文献[1,4]可以验证 R_0 单位区间[0,1]是正则 FI 代数.在 R_0 单位区间[0,1]中,令 $I=[0,\frac{2}{3}]$,则 I 是 R_0 单位区间[0,1]中的通常理想[18],但 I 不是 MT 理想.事实上,令 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}$,则有,$(b\to a)\to 0\in I$, $a\in I$,但 $b\notin I$,因此 I 不是 R_0 单位区间[0,1]中的 MT 理想.

命题 1 设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的一个 MT 理想,$\forall x,y,z\in M$,则

(1)$(y\in D, x\to y=1)\Rightarrow x\in D$;

(2)$(x,y\in D)\Rightarrow((x\to 0)\to y\in D)$;

(3)if $(x\to y)\to 0\in D$, then

$((y\to z)\to(x\to z))\to 0\in D$,

$((z\to x)\to(z\to y))\to 0\in D$;

(4)if $(x\to y)\to 0\in D$, $(y\to z)\to 0\in D$, then $(x\to z)\to 0\in D$.

证明 (1)结合引理 1(2),定义 3 可证,略.

(2)分别由(I_2),(I_1)得:

$((x\to 0)\to y)\to((y\to 0)\to((x\to 0)\to 0))=1$,

$(y\to 0)\to(((x\to 0)\to y)\to((x\to 0)\to 0))=1$.

结合(I_6)知:

$(y\to 0)\to(((x\to 0)\to y)\to x)=1$.

再由引理 1(5)得:

$((((x\to 0)\to y)\to x)\to 0)\to((y\to 0)\to 0)=1$.

再利用(I_6)可得:

$((((x\to 0)\to y)\to x)\to 0)\to y=1$.

又 $y\in D$,由命题 1(1)得:

$(((x\to 0)\to y)\to x)\to 0\in D$.又 $x\in D$,

结合定义 3(2)知,$(x\to 0)\to y\in D$.

(3)由(I_2)得:

$(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=1$,

再由引理 1(5)得:

$(((y\to z)\to(x\to z))\to 0)\to((x\to y)\to 0)=1$.

又$(x\to y)\to 0\in D$,由命题 1(1)知:

$((y\to z)\to(x\to z))\to 0\in D$.

同理:$((z\to x)\to(z\to y))\to 0\in D$.

(4)若$(x\to y)\to 0\in D$,则由命题 1(3)得:

$((y\to z)\to(x\to z))\to 0\in D$.

再结合引理 1(5)知:

$(((x\to z)\to 0)\to((y\to z)\to 0)))\to 0\in D$,

又$(y\to z)\to 0\in D$,由定义 3 得

$(x\to z)\to 0\in D$.

注 2　由引理 1(4),命题 1(1),(2),结合文献[1]知:MT 理想是通常理想.

命题 2　(由同余关系诱导的 MT 理想)

设 M 是正则 FI 代数,$\sim$ 是 M 上的同余关系,定义 $D_{\sim}=\{a\in M\mid a\sim 0)\}$,则 $D_{\sim}$ 是 M 中的 MT 理想.

证明　(1)由于 $0\sim 0$,所以 $0\in D_{\sim}$.

(2)若 $y\in D_{\sim}$,$(x\to y)\to 0\in D_{\sim}$,

则由 $D_{\sim}$ 定义知 $y\sim 0$,$(x\to y)\to 0\sim 0$.

由 $\sim$ 的反身性及保持 $\to$ 知 $(y\to 0)\sim(0\to 0)$,

$(x\to((x\to y)\to 0))\sim(x\to 0)$,

结合 (I_3),(I_1) 得:$(y\to 0)\sim 1$,

$((x\to y)\to(x\to 0))\sim(x\to 0)$.

再次利用 $\sim$ 保持 $\to$ 得:

$((y\to 0)\to((x\to y)\to(x\to 0)))\sim(1\to(x\to 0))$.

再结合 (I_2),(I_1) 知,

$(y\to 0)\to((x\to y)\to(x\to 0))=1$.

再结合引理 1(2)知,$1\sim(x\to 0)$,从而有

$(1\to 0)\sim((x\to 0)\to 0)$.

因此由 (I_6),引理 1(2)得:$0\sim x$.故 $x\in D_{\sim}$.

综合(1),(2) $D_{\sim}$ 是 M 上的 MT 理想.

命题 3　(由 MT 理想诱导的同余关系)

设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的 MT 理想,定义 $\sim_D=\{(x,y)\in M^2\mid(x\to y))\to 0,(y\to x)\to 0\in D\}$.则 $\sim_D$ 是 M 上的同余关系.

证明　(1)容易验证 $\sim_D$ 是等价关系.

(2)若 $x\sim_D y$,$z\sim_D w$.则由 $\sim_D$ 的定义得

$(x\to y)\to 0$,$(y\to x)\to 0\in D$.

由命题 1(3)得:

$((x\to z)\to((y\to z))\to 0\in D$,

$((y\to z)\to(x\to z))\to 0\in D$,

从而由 $\sim_D$ 的定义得 $(x\to z)\sim_D(y\to z)$.

同理可证:$(y\to z)\sim_D(y\to w)$.

由 $\sim_D$ 是等价关系知 $(x\to z)\sim_D(y\to w)$.

综上(1),(2)可知,$\sim_D$ 是同余关系.

命题 4　设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的 MT 理想,则 $D_{\sim_D}=D$.

证明　一方面,设 $x\in D_{\sim D}$.

根据命题 2 知,$x\ \sim_D 0$,再根据命题 3 知,

$(x\to 0)\to 0\in D$,$(0\to x)\to 0\in D$.

结合 (I_6) 知,$x\in D$.故 $D_{\sim D}\subseteq D$.

另一方面,设 $x\in D$,

由 (I_6) 知,$(x\to 0)\to 0\in D$,又 $(0\to x)\to 0\in D$,根据命题 3 知,$x\sim_D 0$,再根据由命题 2 知,$x\in D_{\sim D}$.故 $D_{\sim D}\subseteq D$.

综上可知,结论成立.

推论 1　设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的 MT 理想,$\sim$ 是 M 上的同余关系.则

(1) $\sim_D=\sim_{D_{\sim_D}}$,(2) $D_{\sim}=D_{\sim_{D_{\sim}}}$,(3) $\sim_{D_{\sim}}=\sim_{D_{\sim_{D_{\sim}}}}$.

证明　由命题 3,命题 4 直接可得.

命题 5　设 M 是正则 FI 代数,$\sim$ 是 M 上的同余关系,则 $\sim\subseteq\sim_{D_{\sim}}$.

证明　若 $x\sim y$,由 $\sim$ 的反身性及保持 $\to$ 得:

$(x\to y)\sim(y\to y)$,$(x\to x)\sim(y\to x)$

再结合 (I_3) 以及 $\sim$ 保持 $\to$ 得:

$((x\to y)\to 0)\sim(1\to 0)$,

$(1\to 0)\sim((y\to x)\to 0)$,

由引理 1(2)知,

$((x\to y)\to 0)\sim 0.0\sim((y\to x)\to 0)$,

结合命题 2 知,

$(x\to y)\to 0\in D_{\sim}$,$(y\to x)\to 0\in D_{\sim}$,

再由命题 3 知,$(x,y)\in\sim_{D_{\sim}}$.

故 $\sim\subseteq\sim_{D_{\sim}}$.

4　正则 FI 代数的条件嵌入定理

本节将利用素 MT 理想及其诱导的同余关系给出正则 FI 代数的条件嵌入定理.

定义 4　设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的 MT 理想.若 $\forall x,y\in M$,$(x\to y)\to 0\in M$,或 $(y\to x)\to 0\in M$,则称 D 是 M 的素 MT 理想.

引理 2　设 M 是正则 FI 代数,D 是 M 的素 MT 理想.则商代数 $(M/\sim_D,\to_D,[0]_D)$ 是全序正则 FI 代数.(其中 $\sim_D$ 是 D 诱导的同余关系,$\forall x,y\in M$,$[x]_D$ 是元素 x 所在的等价类,$[x]\to_D[y]=[x\to y]_D$,$[x]_D\le[y]_D$ 当且仅当 $(x\to y)\to 0\in D$.)

证明　首先,根据定义 1 可以验证商代数 $(M/\sim_D,\to_D,[0]_D)$ 是正则 FI 代数,略.

(1)由 (I_3),引理 1(2),定义 3 可证自反性;

(2)根据命题 3 可证反对称性;

(3)根据命题 1(4)可证传递性;

(4)根据 D 是 M 的素 MT 理想和定义 4 可证全序性.

定义 5　设 $\{(M_j,\to_j,0_j)\}_{j\in J}$ 是非空的正则 FI 代数集族.在笛卡尔积 $\Pi_{j\in J}M_j$ 上定义运算

$$\to:(\Pi_{j\in J}M_j)^2\to\Pi_{j\in J}M_j,(x_j)_{j\in J}\to(y_j)_{j\in J}=((x_j\to_j y_j)_j)_{j\in J}.$$

根据定义 1 可证 $(\Pi_{j\in J}M_j,\to,(0_j)_{j\in J})$ 是正则 FI 代数.称之为正则 FI 代数集族 $\{(M_j,\to,(0_j)_{j\in J}\}$ 的乘积正则 FI 代数.

定理 1　(条件嵌入定理)

如果正则 FI 代数 M 满足嵌入条件 (P):$\forall a\in M-\{0\}$,存在 M 的素 MT 理想 D 使得 $a\notin D$,则 M 可以嵌

入一族全序的正则 FI 代数的乘积正则 FI 代数中.

证明 令 $A=\{D\mid D$ 是 M 素 MT 理想$\}$,由于 $M\in A$,则 $A\neq\varnothing$. $\forall D\in A$,由引理 2 知:$(M/\sim_D,\to_D,[0]_D)$是全序的正则 FI 代数.这样,$(\Pi_{D\in A}M/\sim_D\to,([0]_D)_{D\in A})$是全序的正则 FI 代数集族的乘积正则 FI 代数.定义 $\Pi_{D\in A}p_D:M\to\Pi_{D\in A}M/\sim_D$

$\forall x\in M,\ \Pi_{D\in A}p_D(x)=([x]_D)_{D\in A}$,

(1) $\forall x,y\in M$,

$\Pi_{D\in A}p_D(x\to y)=([x\to y]_D)_{D\in A}$

$=([x]_D\to_D[y]_D)_{D\in A}$

$=([x]_D)_{D\in A}\to([y]_D)_{D\in A}$

$=\Pi_{D\in A}p_D(x)\to\Pi_{D\in A}p_D(y)$;

再之,$\Pi_{D\in A}p_D(0)=([0]_D)_{D\in A}$.

因此,$\Pi_{D\in A}p_D:M\to\Pi_{D\in A}M/\sim_D$ 是正则 FI 代数之间的同态映射.

(2)设 $\forall x,y\in M,x\neq y$,则

$(x\to y)\to0=0,(y\to x)\to0=0$ 不能同时成立.

事实上,假若 $(x\to y)\to0=0$,且 $(y\to x)\to0=0$,结合 (I_3),(I_6)及(I_4)得:$x=y$,矛盾!

不妨设$(x\to y)\to0\neq0$,由条件(P)知:存在 M 的素 MT 理想 D 使得$(x\to y)\to0\notin D$,再根据命题 3 知:$(x,y)\notin\ \sim_D$,因此,$[x]_D\neq[y]_D$,从而 $([x]_D)_{D\in A}\neq([y]_D)_{D\in A}$,即,$\Pi_{D\in A}p_D(x)\neq\Pi_{D\in A}p_D(y)$.

因此 $\Pi_{D\in A}p_D:M\to\Pi_{D\in A}M/\sim_D$ 是正则 FI 代数之间的单映射.

(3)定义映射 $p:M\to\Pi_{D\in A}p_D(M)$,$\forall x\in M$,$p(x)=\prod\limits_{D\in A}p_D(x)$.综合(1)~(3)知

$p:M\to\Pi_{D\in A}p_D(M)$是同构映射.

5 MT 理想的生成方法

根据 MT 理想的定义可以证明:由正则 FI 代数中的 MT 理想构成的非空集族的交集仍然是 MT 理想.这样,对于正则 FI 代数 M 的非空子集 A,由于 M 是包含 A 的 MT 理想,因此,M 中包含 A 的 MT 理想的集族是非空集族,这个集族的交集自然是 M 中的包含 A 的最小的 MT 理想(M 中 MT 理想集族的序关系是 M 的幂集中的包含序在 MT 理想集族上的限制).

定义 6 设 M 是正则 FI 代数,A 是 M 的非空子集.称 M 中包含 A 的最小的 MT 理想是由 A 生成的 MT 理想,记作$(A]$.

定理 2 (MT 理想的特征定理)

设 M 是正则 FI 代数,$D\subseteq M,D\neq\varnothing$.则 D 是 MT 理想当且仅当以下条件成立:$\forall x,y\in D$,

(1)若 $y\in D,x\to y=1$,则 $x\in D$;

(2)$(x\to0)\to y\in D$.

证明 由命题 3(1),(2)可知必要性成立.

下证充分性.

(1)根据 $D\neq\varnothing$,取 $x\in D$.由于 $0\to x=1$,因此由条件(1)知 $0\in D$.

(2)若$(x\to y)\to0\in D,y\in D$,

由条件(2)得:$(((x\to y)\to0)\to0)\to y\in D$,

结合(I_6)知,$(x\to y)\to y\in D$.

由(I_1),(I_3)知,

$x\to((x\to y)\to y)=(x\to y)\to(x\to y)=1$,

结合条件(1)知,$x\in D$.

综合(1),(2),定义 3 知充分性成立.

注 3 在逻辑代数中,$(x\to0)\to y$ 的实质为余三角模[4,6],因此,MT 理想的特征定理从另一方面说明了 MT 理想与 MP 滤子的对偶联系的特征.

定义 7 设 M 是正则 FI 代数.定义

(1)$\oplus:M^2\to M,x\oplus y=(x\to0)\to y$.

(2)$\forall n\in Z^+,a,a_1,a_2,\cdots,a_n\in M$, $0a=0$, $1a=a$, $na=a\oplus\cdots\oplus a$(n 个 a 相加).

命题 6 设 M 是正则 FI 代数.则

(1)(2,0)型代数结构$(M,(\oplus,0))$是以 0 为零元的加法交换半群;

(2)$\forall x\in M$,若 $\exists z_1,z_2,y\in M$ 使得 $y\to z_1=1$,$((x\to y)\to0)\to z_2=1$,则 $x\to(z_1\oplus z_2)=1$.

证明 (1)根据定义 7 引理 1(5),(I_6)可证(1)成立,从略.

(2)若 $\exists z_1,z_2,y\in M$ 使得 $y\to z_1=1$,

$((x\to y)\to0)\to z_2=1$,

则由引理 1(3)得:$(x\to y)\to(x\to z_1)=1$,

$(z_2\to0)\to(((x\to y)\to0)\to0)=1$.

结合(I_6)知,$(z_2\to0)\to(x\to y)=1$,

再由引理 1(3)得:

$((x\to y)\to(x\to z_1))\to((z_2\to0)\to(x\to z_1))=1$,

即,$1\to((z_2\to0)\to(x\to z_1))=1$,

由引理 1(2),(I_1)得:

$(z_2\to0)\to(x\to z_1)=x\to((z_2\to0)\to z_1)=1$.

故 $x\to(z_1\oplus z_2)=1$

定理 3 (MT 理想的生成方法)

设 M 是正则 FI 代数,A 是 M 的非空子集,D 是 M 的 MT 理想,$a\in M$.则

(1)$(A]=\{x\in M\mid\exists n\in Z^+,\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 使得 $x\to(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)=1\}$.

(2)$(D\cup\{a\}]=\{x\in M\mid\exists k\in Z^+\cup\{0\},b\in D$, 使得 $x\to(b\oplus ka)=1\}$.

证明 令 $D=\{x\in M\mid\exists n\in Z^+,\exists a_1,a_2,\cdots,$

$a_n \in A$, s.t. $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1\}$.

(1)(i) $A \neq \varnothing$,取 $a \in A$,由(I_5)可证 $0 \in D$.

(ii)设 $y \in D$,$(x \to y) \to 0 \in D$.则由命题 6(2)可证 $x \in D$.

(iii)由(I_3)可证 $A \subseteq D$.

(iv)设 I 是 MT 理想,$A \subseteq I$. $\forall x \in D$,则 $\exists a_1, \cdots, a_n \in A$ s.t. $x \to (a_1 \oplus \cdots \oplus a_2) = 1$.

由于$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq A \subseteq I$,由定理 2(2),定义 7 知,$a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \in I$,再次根据定理 2(1)知 $x \in I$.因此,$D \subseteq I$.

综合(i)~(iv)知,D 是正则 FI 代数 M 中包含 A 的最小的 MT 理想,因此$(A] = D$.

(2)由(1):$D \cup \{a\} = \{x \in M \mid \exists n \in Z^+, \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in D \cup \{a\}$ s.t. $x \to a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1\}$.

注意 D 是 M 的 MT 理想,由定理 2(2),定义 7 知,MT 理想对$\oplus$运算封闭,这样,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中属于 D 的元素(不妨设共有 $n-k$ 个)的$\oplus$运算的结果仍属于 D,将其结果记为 b,而其余 k 个元素皆为 a,其$\oplus$运算的结果为 ka.因此,

$$(D \cup \{a\}] = \{x \in M \mid \exists k \in Z^+ \cup \{0\}, \exists b \in D \text{ 使得 } x \to (b \oplus ka) = 1\}.$$

参考文献

[1] 吴望名.Fuzzy 蕴涵代数[J].模糊系统与数学,1990,4(1):56-63.
Wu Wang-ming. Fuzzy implication algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics,1990,4(1):56-63.(in Chinese)

[2] 徐扬.格蕴涵代数[J].西南交通大学学报,1993,28(1):20-27.
Xu Yang. Lattice implication algebras[J]. Journal of Southwest Jiaotong University,1993,28(1):20-27.(in Chinese)

[3] XU Yang, YUAN Da, QIN Keyun, LIU Jun. Lattice-Valued Logic[M]. Berlin:Spinger-verlag,2003.

[4] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M].北京:科学出版社,2003.
Wang Guo-jun. Non-classical mathematical logic and approximate reasoning(2nd edition)[M]. Beijing:Science Press,2003.(in Chinese)

[5] 吴洪博.基础 R_0-代数与基础 L^* 系统[J].数学进展,2003,32(5):565-576.
Wu Hong-bo. Basis R_0-algebra and basis L^* systems[J]. Advances in Mathematics,2003,32(5):565-576.(in Chinese)

[6] P Hájek. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Dordrech: Kluwer Academic Publishers,1998.

[7] 李壁镜,王国俊.正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J].电子学报,2010,38(3):497-502.
Li Bi-jing, Wang Guo-jun. Logic pseddo-metric spaces of regular implication operators[J]. Acta Electronica Sinica,2010,38(3):497-502.(in Chinese)

[8] 胡明娣,王国俊.对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布[J].电子学报,2011,39(2):419-423.
Hu Ming-di, Wang Guo-jun. Distribution of the symmetrical logic formulas in the classical logic metric space[J]. Acta Electronica Sinica,2011,39(2):419-423.(in Chinese)

[9] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J].中国科学(E 辑),1999,29(1):43-53.
Wang Guo-jun. Fully implication triple I methods for fuzzy reasoning system[J]. Science in China (Series E),1999,29(1):43-53.(in Chinese)

[10] 吴洪博,邵晓丽.完备剩余格中的全蕴涵推理方法[J].数学进展,2006,35(3):303-314.
Wu Hong-bo, Shao Xiao-li. A method of total implication reasoning on complete residuated lattice[J]. Advances in Mathematics,2006,35(3):303-314.(in Chinese)

[11] LIU Huawen, WANG Guojun. Triple I method based on pointwise sustaining degrees[J]. Computers and Mathematics with Applications,2008,55(11):2680-2688.

[12] LIU Huawen, WANG Guojun. Unified forms of fully implication restriction methods for fuzzy reasoning[J]. Information Sciences,2007,177(3):956-966.

[13] 李洪兴,彭佳寅,王加银.基于三 I 算法的模糊系统及其响应性能[J].系统科学与数学,2005,25(5):578-590.
Li Hong-xing, Peng Jia-yin, Wang Jia-yin. Fuzzy systems based on triple I algorithm and their response ability[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2005,25(5):578-590.(in Chinese)

[14] 汪德刚,谷云东,李洪兴.模糊模态命题逻辑及其广义重言式[J].电子学报,2007,35(2):261-264.
Wang De-gang, Gu Yun-dong, Li Hong-xing. Generalized tautology in fuzzy model propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica,2007,35(2):261-264.(in Chinese)

[15] 吴洪博,周建仁.计量逻辑中真度的均值表示及应用[J].电子学报,2012,40(9):1822-1828.
Wu Hong-bo, Zhou Jian-ren. The form of mean representation of truth degree with application in quantitative logic [J]. Acta Electronica Sinica,2012,40(9):1822-1828.(in Chinese)

[16] 王国俊,宋建设.命题逻辑中的程度化方法[J].电子学报,2006,34(2):252-257.
Wang Guo-jun, Song jian-she. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica,2006,34(2):252-257.(in Chinese)

[17] 吴洪博,周建仁,张琼.(3n+1)值逻辑系统 R0L 中公式的真度性质[J].电子学报,2011,39(10):2230-2234.
Wu Hong-bo, Zhou Jian-ren, Zhang Qiong. The properties of truth degrees of formulas in(3n+1)-valued logic system R0L [J]. Acta Electronica Sinica,2011,39(10):2230-2234.(in Chinese)

[18] 程国胜. R_0 - 代数中滤子与理想[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(1): 58 - 61.
Cheng Guo-sheng. The filters and the ideals in R0-algebras [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2001, 15(1): 58 - 61. (in Chinese)
[19] 郑崇友, 樊磊, 崔宏斌. FRAME 与连续格(第二版)[M]. 北京: 首都师范大学, 2000.
Zheng Chong-you, Fan Lei, Cui Hong-bin. Frame and Continuous Lattice(2nd edition)[M]. Beijing: Capital Normal University, 2000. (in Chinese)
[20] 李志伟, 孙立民, 郑崇友. 正则 Fuzzy 蕴涵代数[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 22 - 26.
Li Zhi-wei, Sun Li-min, Zheng Chong-you. Regular fuzzy implication algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(2): 22 - 26. (in Chinese)

作者简介

吴洪博 男, 1959 年出生, 陕西咸阳人, 2001 年 7 月获四川大学理学博士学位, 陕西师范大学教授, 研究方向: 格上拓扑与模糊逻辑.
E-mail: wuhb@snnu.edu.cn

汪 宁 女, 1987 年出生, 河南平顶山人, 陕西师范大学硕士研究生, 研究方向: 格上拓扑与模糊逻辑.
E-mail: haidaxing_86 86@126.com